

**АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА
АППРОКСИМАТИВНОГО КОРРЕЛЯЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНОГО
АНАЛИЗА В ОРТОГОНАЛЬНОМ
БАЗИСЕ БЕССЕЛЯ**

Аннотация. Приводится описание автоматизированной системы аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа случайных процессов, с помощью которой осуществляется моделирование случайных процессов с заданным видом корреляционной функции, аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Бесселя, оценка по параметрам модели обобщенных корреляционно-спектральных характеристик.

Ключевые слова: аппроксимация, корреляционная функция, ортогональный базис Бесселя, преобразование Фурье, случайный процесс, спектральная плотность мощности.

Abstract. The exposition of the automated system of an approximate correlative-spectrum analysis of random processes with which help simulation of random processes with the given aspect of a correlation function, approximation of correlation functions and spectral densities of power orthogonal functions of the Bessel is carried out, an estimation of the generalized correlative-spectral characteristics on parameters of a sample piece is reduced.

Keywords: approximation, correlation function, Bessel orthogonal basis, Fourier transformation, random process, power spectrum density.

Введение

Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа позволяет моделировать случайные процессы с семью типовыми моделями корреляционных функций, проводить аппроксимативный корреляционно-спектральный анализ в ортогональном базисе Бесселя реальных данных, полученных в ходе обработки результатов экспериментальных исследований объектов различной природы.

Отметим, что общий вид ортогональных моделей корреляционной функции (КФ) и спектральной плотности мощности (СПМ) аналогичен моделям, приведенным в [1]. Однако ортогональные функции Бесселя имеют свою специфику, которая будет рассмотрена в данной статье.

1. Структура системы

Структурная схема автоматизированной системы представлена на рис. 1, где цифрами обозначены соответствующие подсистемы:

- 1) генерации случайного процесса;
- 2) первичной обработки процесса;
- 3) настройки оптимальных параметров;
- 4) фильтрации;
- 5) формирования взаимной корреляционной функции;
- 6) аппроксимации взаимной корреляционной функции;
- 7) построения модели спектральной плотности мощности;

- 8) аппроксимации составляющих спектральной плотности мощности;
- 9) восстановления взаимной корреляционной функции;
- 10) ввода-вывода;
- 11) имитационного моделирования;
- 12) исследования ортогональных полиномов и функций.

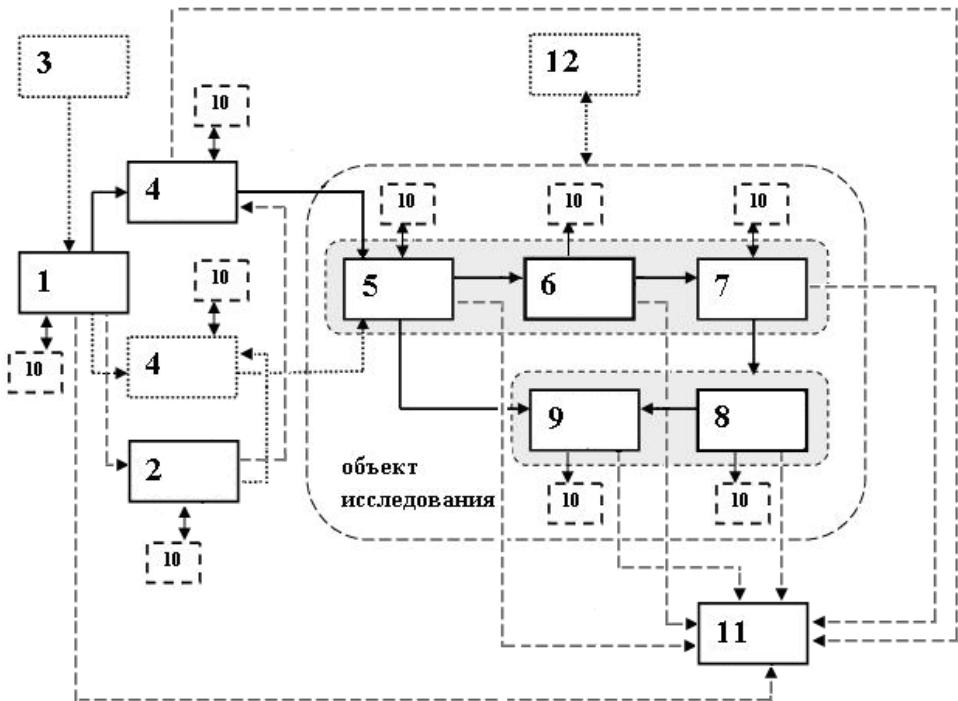


Рис. 1. Структурная схема автоматизированной системы

Подсистема генерации источника случайного процесса (СП) предназначена для моделирования исходного случайного процесса – «Белого шума», либо процесса с заданным видом корреляционной функции по алгоритмам рекурсивной фильтрации [1]. Подсистема позволяет также определить основные характеристики СП: математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса. По полученному процессу строится корреляционная функция и ее фазовый портрет [1]. Для проверки качества генерирования СП имеется возможность сравнения теоретической КФ с КФ сгенерированного процесса с оценкой квадратической, среднеквадратической и максимальной погрешностей аппроксимации.

Подсистема первичной обработки процесса позволяет выделять тренд и центрировать исходный случайный процесс с использованием ортогональных полиномов Бесселя, Лагерра, Лежандра, Чебышева, Эрмита, а также выделять часть случайного процесса для дальнейшего анализа.

Подсистема настройки оптимальных параметров позволяет определить рекомендуемые значения интервала дискретизации и число ординат восстановления корреляционной функции при моделировании случайного процесса с заданным видом корреляционной функции.

Подсистема фильтрации позволяет получить два процесса с заданным видом корреляционной функции в случае взаимного корреляционного

анализа и один процесс в случае автокорреляционного анализа (второй процесс при этом дублируется). При необходимости можно провести исследование основных характеристик моделируемого случайного процесса. Для проверки качества генерирования имеется возможность наложения теоретической КФ на КФ сгенерированного процесса.

Подсистема формирования взаимной корреляционной функции позволяет строить взаимную корреляционную функцию (либо автокорреляционную функцию). Для проверки качества генерирования имеется возможность наложения теоретической ВКФ на ВКФ сгенерированных процессов.

Подсистема аппроксимации взаимной корреляционной функции предназначена для аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Бесселя. В подсистеме можно произвести расчет оптимальных параметров аппроксимации в соответствии с минимумом взвешенной квадратической погрешности аппроксимации. К параметрам аппроксимации относятся коэффициенты разложения Фурье, параметр масштаба, число членов разложения ряда. Методика аппроксимации корреляционных функций с помощью ортогональных разложений описана в работе [2]. По построенной модели определяются обобщенные корреляционные характеристики.

Подсистема построения модели спектральной плотности мощности предназначена для построения взаимной спектральной плотности мощности и ее составляющих: вещественной и мнимой частей спектральной плотности мощности, фазы и модуля спектральной плотности мощности – по параметрам аппроксимативной модели взаимной корреляционной функции. По построенному спектру определяются обобщенные спектральные характеристики, такие как эквивалентная ширина спектра мощности процесса, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности. Для проверки качества аппроксимации имеется возможность наложения теоретической спектральной плотности мощности и ее составляющих.

Подсистема аппроксимации спектральной плотности мощности предназначена для аппроксимации выбранной компоненты спектральной плотности мощности (действительной или мнимой) ортогональными функциями Бесселя. Методика аппроксимации спектральных плотностей мощности с помощью ортогональных разложений описана в работе [1].

Подсистема восстановления взаимной корреляционной функции предназначена для восстановления взаимной корреляционной (автокорреляционной) функции по параметрам моделей действительной и мнимой частей спектральной плотности мощности. Имеется возможность наложения как теоретической кривой, если исходная корреляционная функция была сгенерирована, так и взаимной корреляционной функции из подсистемы формирования взаимной корреляционной функции.

Подсистема имитационного моделирования позволяет проводить имитационное моделирование и анализ разработанных алгоритмов корреляционно-спектрального анализа на адекватность и пригодность при обработке данных. Следует заметить, что данная подсистема связана с подсистемами, соответствующими цифровым эквивалентам 1, 4–9 (рис. 1), из которых экспортятся данные для последующей обработки. Данная подсистема содержит результаты моделирования в виде отчета, а исходные параметры для моделирования можно выбрать в подсистемах, указанных выше.

Подсистема ввода-вывода предназначена для открытия из файла и сохранения в файл определенного формата выбранной функциональной зависимости и ее характеристики.

Заметим, что объектом исследования в данном случае являются ортогональные многочлены Бесселя, их общие и частотные свойства, а также корреляционные и спектральные характеристики, полученные в результате проведения аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональном базисе Бесселя.

Подсистема исследования ортогональных полиномов и функций предназначена для построения ортогональных полиномов и функций, исследования их свойств и поведения на выбранном сегменте ортогональности.

2. Программная реализация системы и основные алгоритмы

В качестве инструментального средства разработки автоматизированной системы был выбран объектно ориентированный язык программирования Object Pascal и среда разработки приложений Borland Delphi v 7.0. Такой выбор можно аргументировать наличием ряда свойств у среды разработки, позволяющих сделать процесс создания приложения сравнительно быстрым, обладающим малой трудоемкостью и удобством в создании интерфейсной части. Несомненным достоинством при решении поставленной задачи является наличие модуля Math, содержащего широкий набор математических, тригонометрических, статистических и других функций.

Разработанная автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа имеет девять основных экранных форм, каждая из которых решает отдельную задачу.

Генерация случайного процесса с заданным видом корреляционной функции производится путем моделирования исходного случайного процесса – «Белого шума», либо процесса с заданным видом корреляционной функции по алгоритмам рекурсивной фильтрации [1].

Общий вид форм генерации источника СП и настройки оптимальных параметров представлен на рис. 2. Общий вид формы фильтрации процесса представлен на рис. 3.

Формирование взаимной корреляционной функции пары процессов производится с помощью мультипликативного метода [1]:

$$\hat{K}_{xy}(J\Delta\tau) = \frac{1}{M-J-1} \sum_{i=1}^{M-J} x_i y_{i+J}. \quad (1)$$

Общий вид формирования взаимной корреляционной функции представлен на рис. 4.

Аппроксимация взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Бесселя. Построение аппроксимативной модели ВКФ в данной системе производится при помощи ортогональных функций Бесселя первого рода нулевого порядка, которые определяются выражением [2]

$$Jf_k(v, \tau, \gamma) = J_v \left[\lambda_k^{(v)} (1 - e^{-2\gamma\tau}) \right] e^{-\gamma\tau}, \quad (2)$$

где km_k – корень («нуль») функции Бесселя; n – порядок функции Бесселя; k – порядок корня; γ – параметр масштаба ортогональных функций;

$$J_V(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\varphi) - V\varphi) d\varphi - \quad (3)$$

определение функции Бесселя.

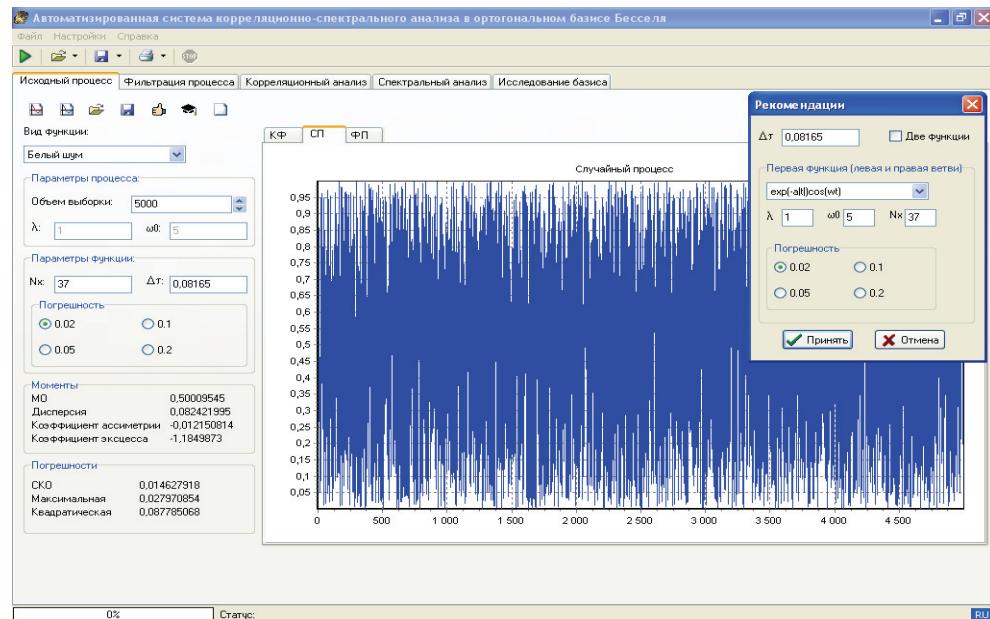


Рис. 2. Вид форм генерации источника СП и настройки оптимальных параметров

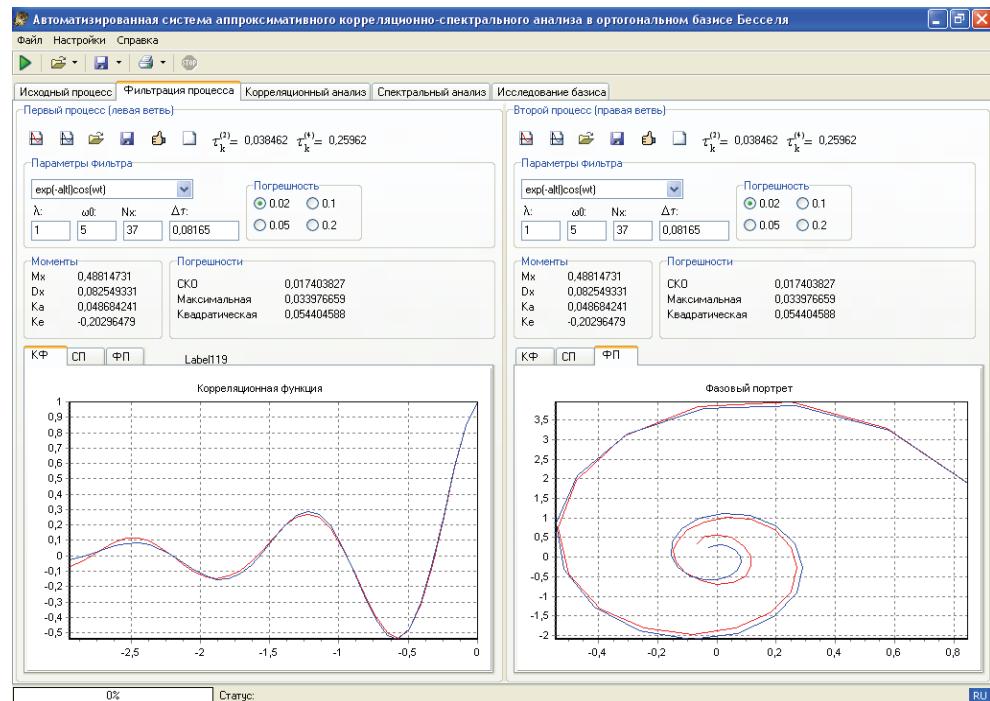


Рис. 3. Вид формы фильтрации процесса

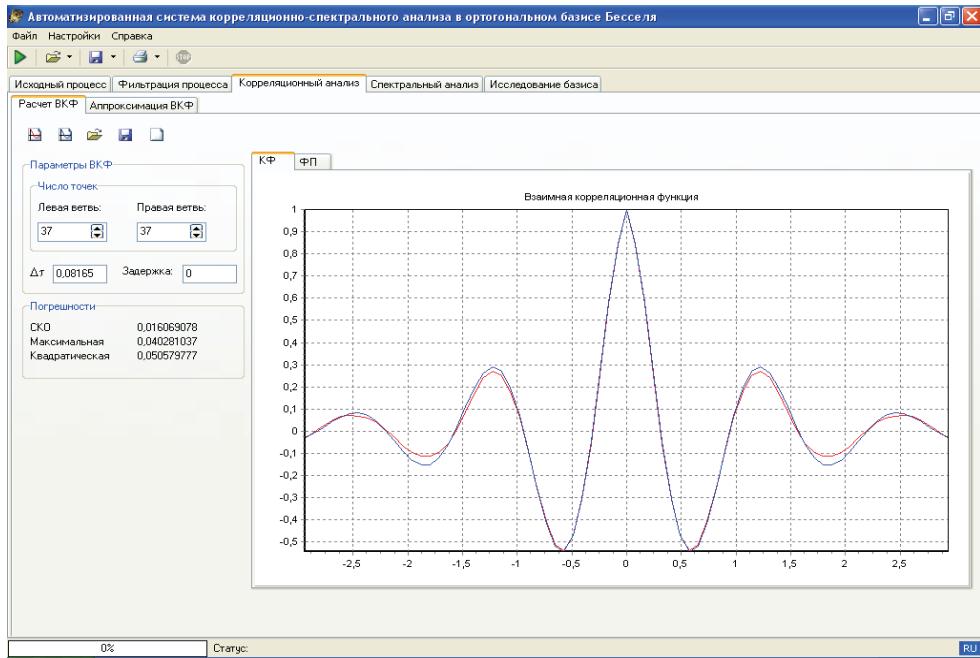


Рис. 4. Вид формы формирования взаимной корреляционной функции

Норма ортогональных функций Бесселя определяется из выражения

$$\|Jf_k(v, \gamma)\|^2 = \frac{J_{v+1}^2(\lambda_k^{(v)})}{4\gamma}. \quad (4)$$

Весовая функция ортогональной функции Бесселя определяется

$$\mu(\tau, \gamma) = (1 - e^{-2\gamma\tau}). \quad (5)$$

Аппроксимирующее выражение имеет следующий вид:

$$K_a(\tau) = \sum_{k=0}^m b_k \cdot Jf_k(v, \tau, \gamma), \quad (6)$$

где $b_k = \beta_k + C_k$ – поправочные коэффициенты разложения в ряд Фурье,

$$\beta_k = \frac{1}{\|Jf_k(v, \gamma)\|^2} \int_0^\infty K_x(\tau) Jf_k(v, \tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau; \quad (7)$$

$$C_k = \frac{\frac{1}{\|Jf_k(v, \gamma)\|^2} \cdot \left(1 - \sum_{s=0}^m \beta(s)\right)}{\sum_{s=0}^m \frac{1}{\|Jf_s(v, \gamma)\|^2}}. \quad (8)$$

Выбор параметра масштаба γ , необходимого для вычисления коэффициентов b_k и β_k , производится, исходя из условия обеспечения минимума

взвешенной квадратической погрешности аппроксимации. Для ортогонального базиса Бесселя параметр масштаба определяется как

$$\gamma = \frac{0,4}{(m+1) \cdot \Delta \tau_0}. \quad (9)$$

Общий вид формы аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Бесселя представлен на рис. 5.

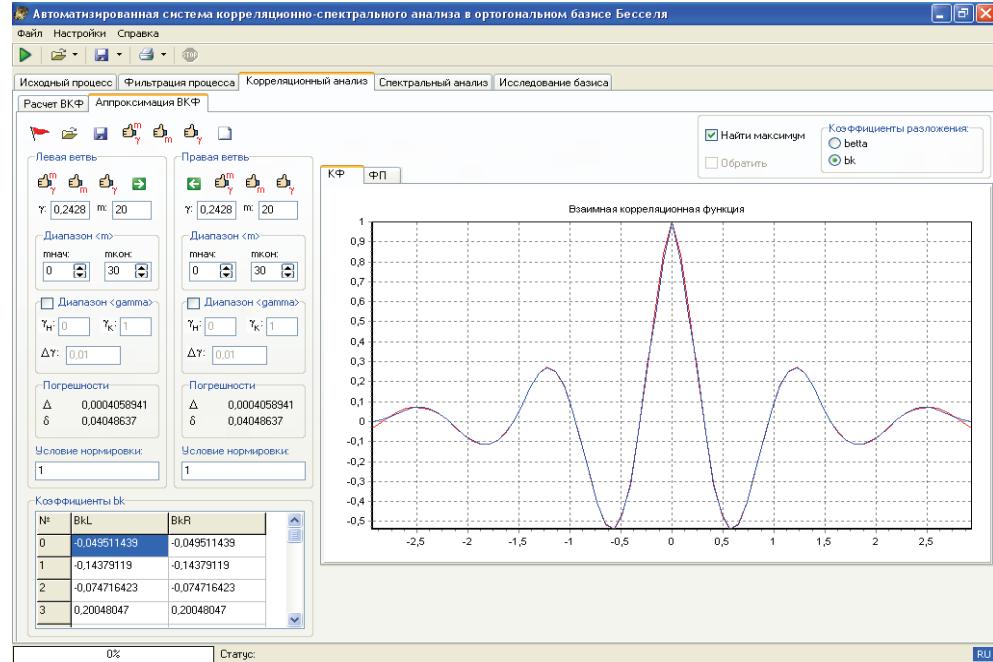


Рис. 5. Вид формы аппроксимации взаимной корреляционной функции ортогональными функциями Бесселя

Спектральный анализ. Оценка СПМ по параметрам аппроксимативной модели взаимной корреляционной функции производится по следующей формуле:

$$S_a(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \sum_{k=0}^m \beta_k \operatorname{Re} W_k(j\omega), \quad (10)$$

где $W_k(j\omega)$ – преобразование Фурье ортогональных функций Бесселя,

$$W_k(j\omega) = \frac{1}{\gamma + j\omega} \cdot \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=0}^n a_i \right), \quad (11)$$

$$\text{где } a_i = \frac{(-1)(kmm_k)^2 \frac{1}{i+1} \left(\frac{1}{2} + i \right)}{\left(\frac{3\gamma + j\omega}{2\gamma} + 2i \right) \left(1 + \frac{3\gamma + j\omega}{2\gamma} + 2i \right)}.$$

По построенному спектру определяются обобщенные спектральные характеристики, такие как эквивалентная ширина спектра мощности процесса, частота, соответствующая максимуму спектральной плотности мощности.

Другим способом оценки СПМ является построение ее аппроксимативной ортогональной модели:

$$S_a(\omega) = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m c_k Jf_k(\omega, \gamma). \quad (12)$$

С учетом четности СПМ данная модель должна гарантировать выполнение условия нормировки:

$$\int_0^\infty S_a(\omega) d\omega = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^m c_k W_k(0) = \sigma_x^2 / 2, \quad (13)$$

где

$$c_k = \beta_k + \left[\frac{1/4 - \sum_{k=0}^m \beta_k \|Jf_k\|^2 [-Jf_k(0, \alpha)]^k}{\sum_{k=0}^m \|Jf_k\|^2} \right] [-Jf_k(0, \alpha)]^n. \quad (14)$$

Оценим ВКФ по параметрам модели СПМ:

$$K_{axy}(\tau) = 2\sigma_x^2 \left[\sum_{k=0}^{m_{\text{Re}}} \beta_k \text{Re}W_{k\text{Re}}(j\tau) + \sum_{k=0}^{m_{\text{Im}}} \beta_k \text{Im}W_{k\text{Im}}(j\tau) \right], \quad (15)$$

где

$$\beta_k \text{Re} = \frac{1}{\|Jf_k \text{Re}\|^2} \int_0^\infty \text{Re}S_{xy}(u) Jf_k \text{Re}(u, \alpha_{\text{Re}}) du; \quad (16)$$

$$\beta_k \text{Im} = \frac{1}{\|Jf_k \text{Im}\|^2} \int_0^\infty \text{Im}S_{xy}(u) Jf_k \text{Im}(u, \alpha_{\text{Im}}) du. \quad (17)$$

Общий вид форм построения взаимной спектральной плотности мощности и ее составляющих, оценки обобщенных спектральных характеристик представлен на рис. 6; общий вид формы аппроксимации выбранной компоненты спектральной плотности мощности (действительной или мнимой) ортогональными функциями Бесселя представлен на рис. 7, и, наконец, общий вид формы восстановления ВКФ по параметрам модели СПМ представлен на рис. 8.

Исследование базиса. В данной автоматизированной системе предусмотрена программная система, позволяющая провести исследование ортогональных функций и ортогональных полиномов.

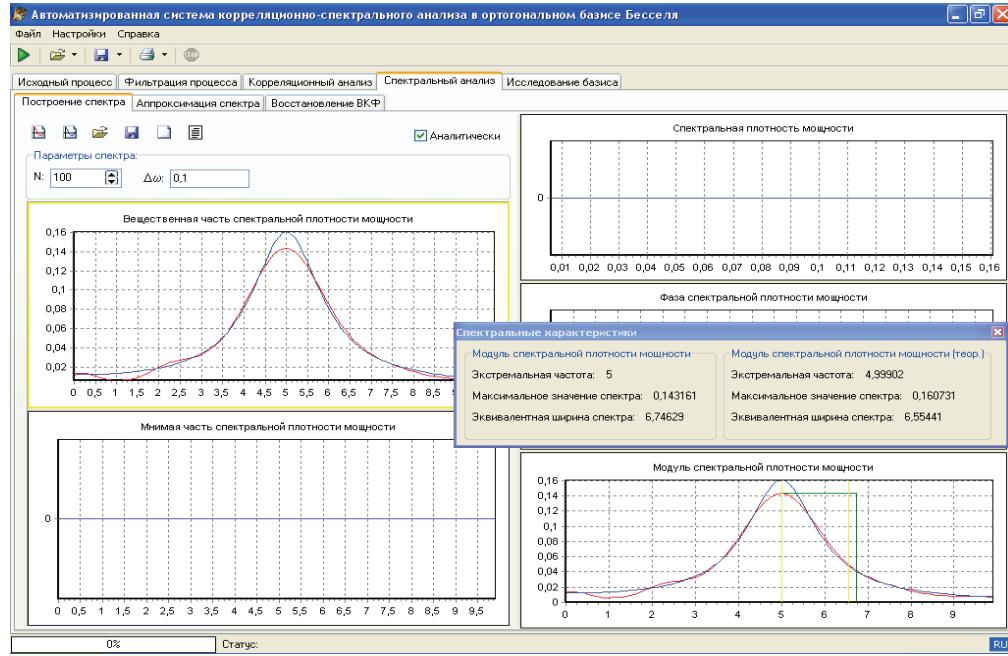


Рис. 6. Вид форм построения взаимной спектральной плотности мощности и ее составляющих и оценки обобщенных спектральных характеристик

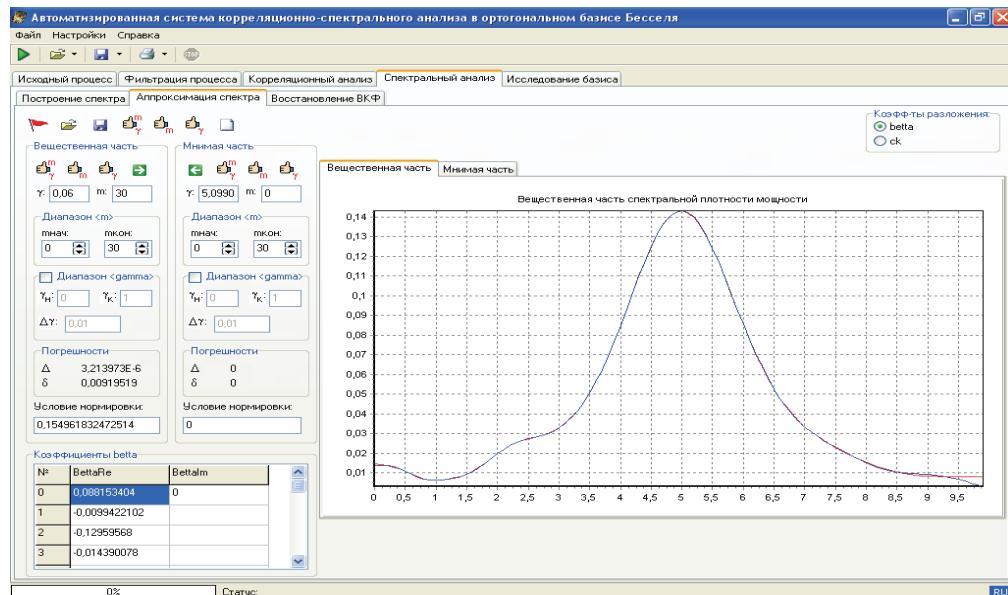


Рис. 7. Вид формы аппроксимации действительной компоненты СПМ

Задав произвольные параметры ортогональных полиномов Бесселя, такие как диапазон «порядков», интервал и шаг построения, можно увидеть их форму, вид и основные характеристики. Данная программная система позволяет увидеть ортогональные многочлены до 551 порядка. Аналогичная ситуация с ортогональными функциями. Общий вид формы исследования ортогональных полиномов и функций Бесселя представлен на рис. 9.

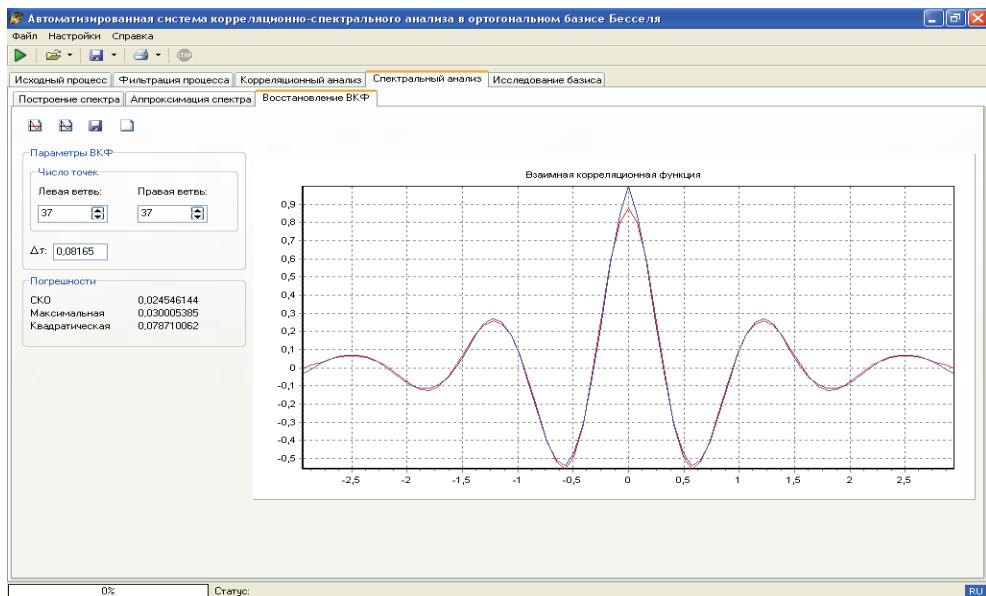


Рис. 8. Вид формы восстановления взаимной корреляционной функции

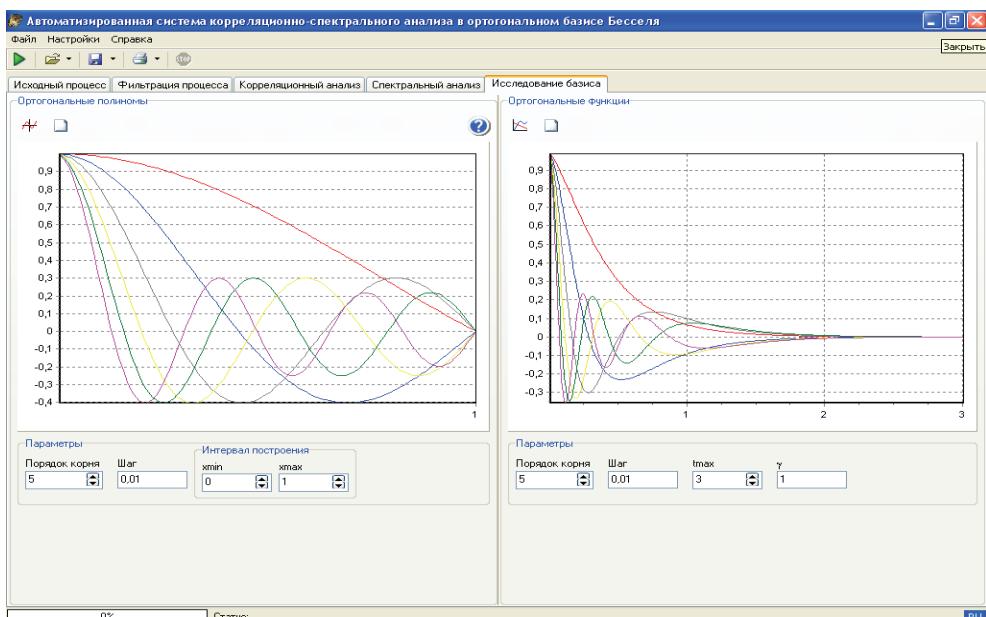


Рис. 9. Вид формы исследования ортогональных полиномов и функций

Список литературы

1. Прикладной анализ случайных процессов / под ред. С. А. Прохорова. – Самара : СНЦ РАН, 2007. – 582 с.
2. **Прохоров, С. А.** Применение ортогональных функций Бесселя для аппроксимации корреляционных функций и оценки спектральной плотности мощности / С. А. Прохоров, Я. В. Газетова // Математическое моделирование и краевые задачи : труды 6 Всероссийской научной конференции с международным участием. – Самара : СГТУ, 2009. – С. 121–125.

Прохоров Сергей Антонович

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой информационных
систем и технологий,
Самарский государственный
аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева

E-mail: sp@smr.ru

Prokhorov Sergey Antonovich

Doctor of engineering sciences, professor,
head of sub-department of informational
systems and technologies,
Samara State Aerospace University
named after S. P. Korolev

Газетова Яна Владимировна

аспирант, Самарский государственный
аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева

E-mail: yanka58@yandex.ru

Gazetova Yana Vladimirovna

Postgraduate student,
Samara State Aerospace University
named after S. P. Korolev

УДК 681.518.3

Прохоров, С. А.

Автоматизированная система аппроксимативного корреляционно-спектрального анализа в ортогональном базисе Бесселя / С. А. Прохоров, Я. В. Газетова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2010. – № 2 (14). – С. 30–40.